Especialització de classes d'isogènia en una corba de Shimura.

Santiago Molina*

October 18, 2012

Índex

Classe d'isogènia de corbes el.líptiques

Sigui $\hat{\mathbb{Z}} = \prod_\ell (\mathbb{Z}_\ell)$ i $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}$.

- $E/\bar{\mathbb{Q}}$ corba el.líptica. $\hat{T}(E) = \prod_\ell T_\ell(E) \simeq \prod_\ell (\mathbb{Z}_\ell)^2 = (\hat{\mathbb{Z}})^2$.
- $E' \to E$ isogènia $\Rightarrow (\hat{\mathbb{Z}})^2 \simeq \hat{T}(E') \stackrel{g \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})}{\longrightarrow} \hat{T}(E) \simeq (\hat{\mathbb{Z}})^2$

Classe d'isogènia de corbes el.líptiques

Sigui $\hat{\mathbb{Z}} = \prod_\ell (\mathbb{Z}_\ell)$ i $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}$.

- $E/\bar{\mathbb{Q}}$ corba el.líptica. $\hat{T}(E) = \prod_\ell T_\ell(E) \simeq \prod_\ell (\mathbb{Z}_\ell)^2 = (\hat{\mathbb{Z}})^2$.
- $E' \to E$ isogènia $\Rightarrow (\hat{\mathbb{Z}})^2 \simeq \hat{T}(E') \stackrel{g \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})}{\longrightarrow} \hat{T}(E) \simeq (\hat{\mathbb{Z}})^2$

$\bar{\mathbb{Q}}$-classe d'isogènia $[E]$:

$$[E] \quad \simeq \quad \mathrm{End}^0(E) \backslash \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}}) / \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$$

Classe d'isogènia de corbes el.líptiques

Sigui $\hat{\mathbb{Z}} = \prod_\ell (\mathbb{Z}_\ell)$ i $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}$.

- $E/\bar{\mathbb{Q}}$ corba el.líptica. $\hat{T}(E) = \prod_\ell T_\ell(E) \simeq \prod_\ell (\mathbb{Z}_\ell)^2 = (\hat{\mathbb{Z}})^2$.
- $E' \to E$ isogènia $\Rightarrow (\hat{\mathbb{Z}})^2 \simeq \hat{T}(E') \xrightarrow{g \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})} \hat{T}(E) \simeq (\hat{\mathbb{Z}})^2$

  $\bar{\mathbb{Q}}$-classe d'isogènia $[E]$:

$$\begin{aligned} [E] &\simeq \mathrm{End}^0(E) \backslash \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}}) / \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Q}^\times \backslash \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}}) / \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}), & E \text{ no CM} \\ K^\times \backslash \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}}) / \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}), & E \text{ CM.} \end{array} \right. . \end{aligned}$$

- Per tant $[E]$ quocient de

$$\mathrm{End}^0(E)^\times \backslash \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})$$

Classe d'isogènia en la corba modular

- $X_0(N)$ corba modular, $X_0(N)(\mathbb{C}) = \mathcal{H}/\Gamma_0(N)$ on $\Gamma_0(N) = K_0(N) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
- Com $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/\hat{K}_0(N) = 1$,

Classe d'isogènia en la corba modular

- $X_0(N)$ corba modular, $X_0(N)(\mathbb{C}) = \mathcal{H}/\Gamma_0(N)$ on $\Gamma_0(N) = K_0(N) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
- Com $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/\hat{K}_0(N) = 1$,

$$X_0(N)(\mathbb{C}) = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})/K_0(N)^\times = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash((\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/\hat{K}_0(N)^\times).$$

Classe d'isogènia en la corba modular

- $X_0(N)$ corba modular, $X_0(N)(\mathbb{C}) = \mathcal{H}/\Gamma_0(N)$ on $\Gamma_0(N) = K_0(N) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
- Com $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/\hat{K}_0(N) = 1$,

$$X_0(N)(\mathbb{C}) = \mathbb{P}/K_0(N)^\times = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash(\mathbb{P} \times \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/\hat{K}_0(N)^\times).$$

Classe d'isogènia en la corba modular

- $X_0(N)$ corba modular, $X_0(N)(\mathbb{C}) = \mathcal{H}/\Gamma_0(N)$ on $\Gamma_0(N) = K_0(N) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
- Com $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/\hat{K}_0(N) = 1$,

$$X_0(N)(\mathbb{C}) = \mathbb{P}/K_0(N)^\times = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash(\mathbb{P} \times \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/\hat{K}_0(N)^\times).$$

- $\tau \in \mathbb{P} \Rightarrow \ \{(\tau, [g])\} = \{\tau\} \times \mathrm{Stab}(\tau)\backslash\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/\hat{K}_0(N)^\times$

Classe d'isogènia en la corba modular

- $X_0(N)$ corba modular, $X_0(N)(\mathbb{C}) = \mathcal{H}/\Gamma_0(N)$ on $\Gamma_0(N) = K_0(N) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
- Com $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/\hat{K}_0(N) = 1$,

$$X_0(N)(\mathbb{C}) = \mathbb{P}/K_0(N)^\times = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash(\mathbb{P} \times \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/\hat{K}_0(N)^\times).$$

- $\tau \in \mathbb{P} \Rightarrow \ \{(\tau, [g])\} = \{\tau\} \times \mathrm{Stab}(\tau)\backslash\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/\hat{K}_0(N)^\times$

$$\{(\tau, [g])\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\tau\} \times \mathbb{Q}^\times\backslash\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/K_0(N)^\times, \\ \{\tau\} \times K^\times\backslash\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/K_0(N)^\times. \end{array} \right. .$$

- Interpretació moduli: $(\tau, [g]) \in X_0(N)(\mathbb{C})$ parametritza (E, C_N), $E/\mathbb{C}$ corba elliptica i C_N subgrup cíclic d'ordre N.

$$[E(N)] = \{(E', C'_N) : \ E \sim E'\} \longleftrightarrow \{(\tau, [g])\}$$

Acció de Galois en $\mathbb{Q}$ − *corbes*

Definition

Corba el.líptica E/L isògena a les Galois conjugades és $\mathbb{Q}$-*corba*

Acció de Galois en $\mathbb{Q}$ – *corbes*

Definition

Corba el.líptica E/L isògena a les Galois conjugades és $\mathbb{Q}$-*corba*

$$[E] \circlearrowleft \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \quad [E(N)] \circlearrowleft \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

Acció de Galois en $\mathbb{Q}$ – *corbes*

Definition

Corba el.líptica E/L isògena a les Galois conjugades és $\mathbb{Q}$-*corba*

$$[E] \circlearrowleft \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \quad [E(N)] \circlearrowleft \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

Analogia corbes el.líptiques:

$$\rho_E : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/\mathrm{End}^0(E)^\times$$

Acció de Galois en $\mathbb{Q}$ – *corbes*

Definition

Corba el.líptica E/L isògena a les Galois conjugades és $\mathbb{Q}$-*corba*

$$[E] \circlearrowleft \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \quad [E(N)] \circlearrowleft \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

Analogia corbes el.líptiques:

$$\rho_E : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/\mathrm{End}^0(E)^\times$$

- $\bar{\rho}_E : \mathrm{Gal}(\bar{L}/L) \to \prod_\ell \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ projectivitza a ρ_E.
- ρ_E depen de E modulo $\bar{\mathbb{Q}}$-isomorfisme.
- $E \sim_{\bar{\mathbb{Q}}} E'$ implica ρ_E conjugada $\rho_{E'}$
- ρ_E és modular.

Acció de Galois $[E(N)] \subset X_0(N)$

$X_0(N)/\mathbb{Q}$ model canònic.

Theorem

Acció $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *on* $[E(N)]$*:*

$$\begin{array}{ccc} X_0(N) & \stackrel{\sigma\in\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}{\longrightarrow} & X_0(N) \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{End}^0(E)\backslash\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/K_0(N)^\times & \longrightarrow & \mathrm{End}^0(E)\backslash\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Q}})/K_0(N)^\times \\ [g] & \longmapsto & [\rho_E(\sigma)^{-1}g]. \end{array}$$

Superfícies abelianes amb QM i corbes de Shimura

$D, N \in \mathbb{Z}^+$, $(D, N) = 1$, $\square \nmid DN$.

- $B = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i + \mathbb{Q}j + \mathbb{Q}ij, \quad i^2, j^2 \in \mathbb{Q}^*$, $ij = -ji$, àlgebra de quaternions *indefinida* discriminant D.
- $\mathcal{O}$ ordre d'Eichler nivell N en B,

Superfícies abelianes amb QM i corbes de Shimura

$D, N \in \mathbb{Z}^+$, $(D, N) = 1$, $\square \nmid DN$.

- $B = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i + \mathbb{Q}j + \mathbb{Q}ij, \quad i^2, j^2 \in \mathbb{Q}^*$, $ij = -ji$, àlgebra de quaternions *indefinida* discriminant D.
- $\mathcal{O}$ ordre d'Eichler nivell N en B,
- (A, ι) QM per $\mathcal{O}$, $\begin{cases} A/\mathbb{C} \text{ superfície abeliana} \\ \iota : \mathcal{O} \hookrightarrow \mathrm{End}(A) \end{cases}$
- Espai de moduli: *Corba de Shimura*

$$X_0(D, N)(\mathbb{C}) = (B^\times \backslash (\mathbb{P} \times \hat{B}^\times / \hat{\mathcal{O}}^\times)),$$

Superfícies abelianes amb QM i corbes de Shimura

$D, N \in \mathbb{Z}^+$, $(D, N) = 1$, $\square \nmid DN$.

- $B = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i + \mathbb{Q}j + \mathbb{Q}ij$, $\quad i^2, j^2 \in \mathbb{Q}^*$, $ij = -ji$, àlgebra de quaternions *indefinida* discriminant D.
- $\mathcal{O}$ ordre d'Eichler nivell N en B,
- (A, ι) QM per $\mathcal{O}$, $\left\{ \begin{array}{l} A/\mathbb{C} \text{ superfície abeliana} \\ \iota : \mathcal{O} \hookrightarrow \mathrm{End}(A) \end{array} \right.$
- Espai de moduli: *Corba de Shimura*

$$X_0(D, N)(\mathbb{C}) = (B^\times \backslash (\mathbb{P} \times \hat{B}^\times / \hat{\mathcal{O}}^\times)),$$

- $\tau \in \mathbb{P} \Rightarrow \ \{(\tau, [b])\} = \{\tau\} \times \mathrm{Stab}(\tau) \backslash \hat{B}^\times / \hat{\mathcal{O}}^\times$

Superfícies abelianes amb QM i corbes de Shimura

$D, N \in \mathbb{Z}^+$, $(D,N) = 1$, $\square \nmid DN$.

- $B = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i + \mathbb{Q}j + \mathbb{Q}ij, \quad i^2, j^2 \in \mathbb{Q}^*$, $ij = -ji$, àlgebra de quaternions *indefinida* discriminant D.
- $\mathcal{O}$ ordre d'Eichler nivell N en B,
- (A, ι) QM per $\mathcal{O}$, $\begin{cases} A/\mathbb{C} \text{ superfície abeliana} \\ \iota : \mathcal{O} \hookrightarrow \mathrm{End}(A) \end{cases}$
- Espai de moduli: *Corba de Shimura*

$$X_0(D,N)(\mathbb{C}) = (B^\times \backslash (\mathbb{P} \times \hat{B}^\times / \hat{\mathcal{O}}^\times)),$$

- $\tau \in \mathbb{P} \Rightarrow \ \{(\tau, [b])\} = \{\tau\} \times \mathrm{Stab}(\tau) \backslash \hat{B}^\times / \hat{\mathcal{O}}^\times$

$$\{(\tau, [b])\} = \begin{cases} \{\tau\} \times \mathbb{Q}^\times \backslash \hat{B} / \hat{\mathcal{O}}^\times, \\ \{\tau\} \times K^\times \backslash \hat{B} / \hat{\mathcal{O}}^\times. \end{cases}.$$

Acció de Galois en $\bar{\mathbb{Q}}$-superfícies abelianes

Definition

$\mathbb{Q}$-*superfície abeliana amb QM* $(A, \iota)/L$ tal que $(A, \iota) \sim (A^\sigma, \iota^\sigma)$

Acció de Galois en $\bar{\mathbb{Q}}$-superfícies abelianes

Definition

$\mathbb{Q}$-*superfície abeliana amb QM* $(A, \iota)/L$ tal que $(A, \iota) \sim (A^\sigma, \iota^\sigma)$

$$[A, \iota] \circlearrowleft \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

Acció de Galois en $\bar{\mathbb{Q}}$-superfícies abelianes

Definition

$\mathbb{Q}$-*superfície abeliana amb QM* $(A,\iota)/L$ tal que $(A,\iota)\sim(A^\sigma,\iota^\sigma)$

$$[A,\iota] \circlearrowleft \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

Anàlogament:

$$\rho_{(A,\iota)} : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \hat{B}^\times/\mathrm{End}^0(A,\iota)^\times$$

Acció de Galois en $\bar{\mathbb{Q}}$-superfícies abelianes

Definition

$\mathbb{Q}$-superfície abeliana amb QM $(A,\iota)/L$ tal que $(A,\iota)\sim(A^\sigma,\iota^\sigma)$

$$[A,\iota] \circlearrowleft \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

Anàlogament:

$$\rho_{(A,\iota)}:\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\longrightarrow \hat{B}^\times/\mathrm{End}^0(A,\iota)^\times$$

- $\bar{\rho}_{(A,\iota)}:\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)\to\prod_\ell B_\ell^\times/\pm 1$ projectivitza a $\rho_{(A,\iota)}$.
  C. de Vera, V. Rotger, Galois representations over fields of moduli and rational points on Shimura curves, submitted.
- $\rho_{(A,\iota)}$ depen de (A,ι) modulo $\bar{\mathbb{Q}}$-isomorfisme?.
- $(A,\iota)\sim_{\bar{\mathbb{Q}}}(A',\iota')$ implica $\rho_{(A,\iota)}$ conjugada $\rho_{(A',\iota')}$
- $\rho_{(A,\iota)}$ és modular?????.

Acció de Galois en punts de $X_0(D,N)$

$X_0(D,N)/\mathbb{Q}$ model canònic.

Theorem

1. *La classe $[A,\iota]$ s'identifica amb*

$$\{(\tau,[b])\}=\{\tau\}\times \mathrm{End}^0(A,\iota)^\times\backslash\hat{B}^\times/\hat{\mathcal{O}}^\times,$$

X. Guitart, S. Molina, Parametrization of abelian K-surfaces with quaternionic multiplication. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).

2. *Acció $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on $[(A,\iota)]$:*

$$\begin{array}{ccc}
X_0(D,N) & \stackrel{\sigma\in\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}{\longrightarrow} & X_0(D,N)\\
\cup & & \cup\\
\mathrm{End}^0(A,\iota)^\times\backslash\hat{B}^\times/\hat{\mathcal{O}}^\times & \longrightarrow & \mathrm{End}^0(A,\iota)^\times\backslash\hat{B}^\times/\hat{\mathcal{O}}^\times\\
{[b]} & \longmapsto & [\rho_{(A,\iota)}(\sigma)^{-1}b].
\end{array}$$

Reducció supersingular

- p primer, $B^p/\mathbb{Q}$ algebra quaternions $\mathrm{disc}(B^p) = \left\{ \begin{array}{ll} Dp & (p \nmid D) \\ \frac{D}{p} & (p \mid D) \end{array} \right.$
- $\mathcal{X}_0(D,N)/\mathbb{Z}$ model enter de Morita, $\mathcal{X}_0(D,N)_p/\mathbb{F}_p$ especialització.

Reducció supersingular

- p primer, $B^p/\mathbb{Q}$ algebra quaternions $\mathrm{disc}(B^p) = \begin{cases} Dp & (p \nmid D) \\ \frac{D}{p} & (p \mid D) \end{cases}$
- $\mathcal{X}_0(D,N)/\mathbb{Z}$ model enter de Morita, $\mathcal{X}_0(D,N)_p/\mathbb{F}_p$ especialització.
- Si $p \mid DN$, punts singulars i, si $p \nmid DN$, punts supersingulars de $\mathcal{X}_0(D,N)_p$:

$$(B^p)^\times \backslash (\hat{B}^p)^\times / \hat{\mathcal{O}}'^\times$$

Reducció supersingular

- p primer, $B^p/\mathbb{Q}$ algebra quaternions $\mathrm{disc}(B^p) = \begin{cases} Dp & (p \nmid D) \\ \frac{D}{p} & (p \mid D) \end{cases}$
- $\mathcal{X}_0(D,N)/\mathbb{Z}$ model enter de Morita, $\mathcal{X}_0(D,N)_p/\mathbb{F}_p$ especialització.
- Si $p \mid DN$, punts singulars i, si $p \nmid DN$, punts supersingulars de $\mathcal{X}_0(D,N)_p$:

$$(B^p)^\times \backslash (\hat{B}^p)^\times / \hat{\mathcal{O}}'^\times$$

$\Rightarrow$ Reducció $\mathbb{Q}$-superfície abeliana:

$$\rho_{(A,\iota)} : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}'^\times \backslash (\hat{B}^p)^\times / (B^p)^\times$$

(Té sentit parlar de modularitat?)

Cas multiplicació complexa

Assume $\mathrm{End}^0(A,\iota) = K$ quadràtic imaginari.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \arrow[r, "\rho_{(A,\iota)}"] & \hat{B}^\times/K^\times \\
\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K) \arrow[ur, hook] \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \arrow[r, "Art^{-1}"] & \hat{K}^\times/K^\times \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

(Reciprocitat de Shimura)

Cas multiplicació complexa

Assume $\mathrm{End}^0(A,\iota) = K$ quadràtic imaginari.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \arrow[r, "\rho_{(A,\iota)}"] & \hat{B}^\times/K^\times \\ \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K) \arrow[ur, hook] \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \arrow[r, "Art^{-1}"] & \hat{K}^\times/K^\times \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

(Reciprocitat de Shimura)

Theorem (M.)

Reducció singular o supersingular:

$$B^\times\backslash\hat{B}^\times/\hat{\mathcal{O}}^\times \supset K^\times\backslash\hat{K}^\times/R^\times \longleftrightarrow K^\times\backslash\hat{K}^\times/R^\times \subseteq (B^p)^\times\backslash(\hat{B}^p)^\times/\hat{\mathcal{O}}'^\times$$

Cas multiplicació complexa

Assume $\mathrm{End}^0(A,\iota) = K$ quadràtic imaginari.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \arrow[r, "\bar\rho_{(A,\iota)}"] & \hat{\mathcal{O}}'^\times \backslash (\hat{B}^p)^\times / (B^p)^\times \\ \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K) \arrow[ur, hook] \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \arrow[r, "Art^{-1}"] & \hat{R}^\times \backslash \hat{K}^\times / K^\times \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

(Reciprocitat de Shimura)

Theorem (M.)

Reducció singular o supersingular:

$$B^\times \backslash \hat{B}^\times / \hat{\mathcal{O}}^\times \supset K^\times \backslash \hat{K}^\times / R^\times \longleftrightarrow K^\times \backslash \hat{K}^\times / R^\times \subseteq (B^p)^\times \backslash (\hat{B}^p)^\times / \hat{\mathcal{O}}'^\times$$